σελ. 33

20/11/19

§4. Άρτιες - Περιττές Συν/σεις

• **ΟΡΙΣΜΟΣ**: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

f λέγεται άρτια, αν-ν, $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

f λέγεται περιττή, αν-ν, $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Π.χ. $\cos hx$ άρτια, $\sin hx$ περιττή

Παρατηρήσεις:

1) Έστω f άρτια κ. περιττή

Έχουμε: $\underset{\text{άρτια}}{f(x) = f(-x)} \underset{\text{περιττή}}{=} -f(x) \Rightarrow 2f(x) = 0$

$\Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x$

2) $f(x) = c$ (σταθ. συν/ση) είναι άρτια συν/ση

3) $f(x) = x + 1$ δεν είναι άρτια κ. δεν είναι περιττή

4) Άθροισμα ή διαφορά αρτίων = άρτια

— " — — " — — " — περιττών = περιττή

Πρόταση: $\forall f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $\exists$ μοναδικές f_e άρτια, f_o περιττή : $f = f_e + f_o$

Απόδ.:

$\boxed{\text{Ύπαρξη}}$: $f_e(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$, $f_o(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$

$\boxed{\text{Μοναδικότητα}}$: Έστω $f_e(x) + f_o(x) = \tilde{f}_e(x) + \tilde{f}_o(x)$

$\Rightarrow g(x) = f_e(x) - \tilde{f}_e(x) = \tilde{f}_o(x) - f_o(x)$

$\xRightarrow[\text{Παρατ. 1}]{} f_e(x) - \tilde{f}_e(x) = 0$

$\Rightarrow \tilde{f}_e(x) - f_e(x) = 0$

$\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΗ}}$: $p(x) = \sum_{k=-N}^{N} p_k e^{-ikx}$

$$\downarrow$$

$p(x) = p_e(x) + p_o(x)$

$p_e = ;$ $\quad p_o = ;$

ΛΥΣΗ:

Γνωρίζ. ότι το $p(x)$ γράφεται

$$p(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

όπου $a_k = p_k + p_{-k}$, $\quad b_k = i(p_k - p_{-k})$

$$p_e(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos kx$$

$$p_o(x) = \sum_{k=1}^{N} b_k \sin kx$$

"$\boxed{\text{Κεφάλαιο 3}}$: Συντελεστές κ. σειρές Fourier"

Έχουμε δει ότι:

$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$ ορίζει εσωτερικό γινόμενο στο $R(\mathbb{T})$

$\|f\|_2 = \langle f, f \rangle^{1/2} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$: η 2-νόρμα

$d(f,g) \doteq \|f-g\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)-g(x)|^2 dx \right)^{1/2}$

$e_n(x) = e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$, είναι ορθοκανονικό σύστημα συναρτήσεων

$p_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} p_k e^{ikx}$ τριγων. πολ/μα $(N=0,1,2,\dots)$

$p_k = \langle p_N(x), e_k(x)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p_N(x)\underbrace{e^{-ikx}}\,dx$

$\overline{e_i(x)} = \overline{e^{ikx}} = e^{-ikx}$

• <u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: $f \in R(\mathbb{T})$

Ονομάζουμε n-οστό συντελεστή Fourier της f, $n \in \mathbb{Z}$, τον αριθμό $\hat{f}(n) = \langle f(x), e_n(x)\rangle$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx$$

Ονομάζουμε σειρά Fourier της f την διπλή σειρά $\sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{inx}$

Γράφουμε $S[f] \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{inx}$

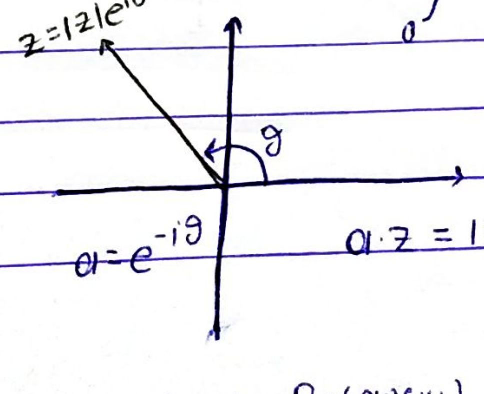
<u>Παρατηρήσεις</u>:

1. $f(x)e^{-inx} \in R(\mathbb{T})$
2. Για τα ολοκληρώματα ισχύει:

$$\left|\int_a^b g(x)\,dx\right| \le \int_a^b |g(x)|\,dx \quad \left(\begin{array}{c}\text{Τριγων. ανισότητα}\\ \text{για ολοκληρώματα}\end{array}\right)$$

<u>ΑΠΟΔ.</u>: <u>HW</u>

<u>ΥΠΟΔ.</u>: $z = \int_0^{2\pi} g(x)\,dx \in \mathbb{C}$



$a\cdot z = |z|$

$\exists a \in \mathbb{C}$, $|a|=1$: $az = |z| > 0$

$az = a\int_a^b g = \int_a^b ag$

$\Rightarrow \mathrm{Im}\int_a^b ag = 0$

$u(x) = \mathrm{Re}(ag(x)) \rightarrow u(x) \le |u(x)| \le |ag(x)| = |a|\cdot|g(x)|$

Άρα: $|\hat{f}(n)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \right|$

$\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)| dx = \|f\|_1$

τριγων. ανισ.

$(|e^{-inx}| = 1 \quad \forall n)$

3. Θα δούμε ότι: $\hat{f}(n) \to 0 \; , \; n \to \infty$

$\hat{f}(n) \to 0 \; , \; n \to -\infty$

4. $\sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{inx}$: τι σημαίνει αυτό το σύμβολο;

$S[f] \sim$

$S_N(f, x) = \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k) e^{ikx} \in \underbrace{TP}_{\text{τριγωνομ. πολ/μο}}$

Δηλ:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{inx} \longleftrightarrow S_N(f, x) = \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k) e^{ikx}$$

Το άθροισμα της σειράς είναι το όριο της $S_N(f, x)$, $N \to \infty$

5. $S_N(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$

$$\left.\begin{aligned} a_k &= \hat{f}(k) + \hat{f}(-k) \\ b_k &= i(\hat{f}(k) - \hat{f}(-k)) \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} \hat{f}(k) &= \frac{a_k - i b_k}{2} \\ \hat{f}(-k) &= \frac{a_k + i b_k}{2} \end{aligned}\right.$$

$\begin{pmatrix} b_0 = 0 \\ a_0 = 2\hat{f}(0) \end{pmatrix}$

$k = 0, 1, 2, \dots$

$$S[f] \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{inx}$$ εκθετική

$$\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$ Τριγ. μορφή

Ολοκληρωτικοί τύποι για a_n, b_n:

$$a_n = \hat{f}(n) + \hat{f}(-n)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{inx} dx$$

$$e^{inx} + e^{-inx} = 2\cos nx$$
$$e^{-inx} + e^{inx} = -2i \sin nx$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

Ομοίως: $$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin x \, dx$$

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx = \langle f(x), e_n(x) \rangle$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

Σημείωση: Αν f παραγ. $\Rightarrow$ a_n, b_n παραγ. τ/n κ $\hat{f}(n) = \hat{f}(-n)$

6. Έχουμε δει ότι:

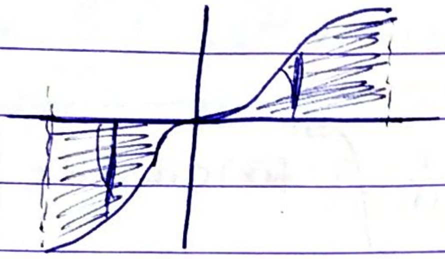
Αν g 2π-περιοδική κ. ολοκλ.

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} g(x)dx = \int_a^{a+2\pi} g(x)dx \quad \forall a$$

g περιττή: $\displaystyle\int_0^{2\pi} g(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx = 0$

$a = -\pi$

g άρτια: $\displaystyle\int_0^{2\pi} g(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx = 2\int_0^{\pi} g(x)dx$



$f(x) \in R(\mathbb{T})$:

Αν f άρτια $\longrightarrow$ $\displaystyle a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0$$

f άρτια $\Leftrightarrow$ $\displaystyle S[f] \sim \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} a_n \cos nx$

Ομοίως:

Αν f περιττή $\Rightarrow$ $a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

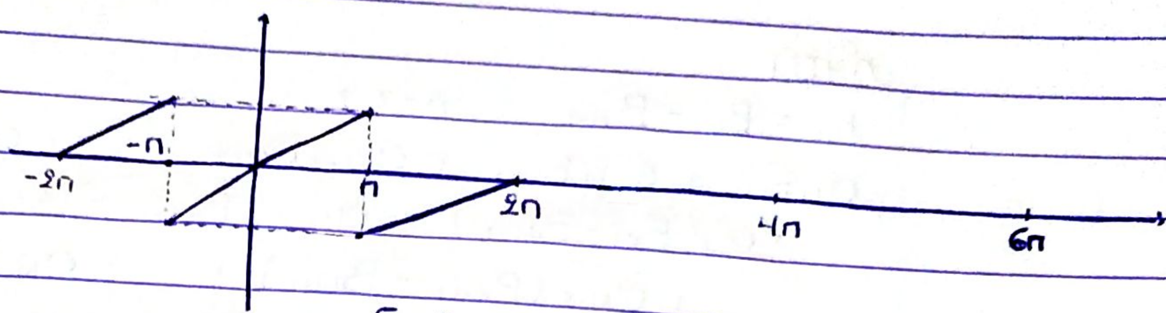
$$S[f] \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

ΑΣΚΗΣΗ 3.3 σελ. 42:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\pi, \pi) \\ 0, & x = -\pi, \pi \end{cases}$$

$\hat{f}(n) = ;$

ΛΥΣΗ:



$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, \pi) \\ x - 2\pi, & x \in (\pi, 2\pi) \\ 0, & x = 2\pi, \pi \end{cases}$$

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \left(\frac{e^{-inx}}{-in} \right)' dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[x \cdot \frac{e^{-inx}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} - \cancel{\underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inx}}{-in}\, dx}} \to 0 \qquad n \neq 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}\, dx = \int_{0}^{2\pi} e^{-inx}\, dx = 0$$

$$= \frac{1}{2\cancel{\pi}} \cancel{\pi} \cdot \frac{e^{-in\pi}}{-in} + \frac{1}{2\cancel{\pi}} \cancel{\pi} \cdot \frac{e^{in\pi}}{-in}$$

$$= \frac{1}{2in} \cdot \left(-e^{in\pi} - e^{-in\pi} \right) = -\frac{1}{2in} \left(e^{in\pi} + e^{-in\pi} \right)$$

$$= -\frac{1}{in} \cdot \cos n\pi = \frac{(-1)^{n+1}}{in}$$

HW: 3.2, 3.4, 3.5

3.6 $a_n, b_n \in \mathbb{C}$, $n=1,2,\dots$

$B_N = \sum_{n=1}^{N} b_n$, $1<M<N$, $B_0=0$

Δ.ο. $\sum_{n=M}^{N} a_n b_n = a_N B_N - a_M B_{M-1} + \sum_{n=M}^{N-1} \underbrace{(a_n - a_{n+1})}_{\Delta a_n} B_n$ ← Άθροιση κατά μέρη

ΛΥΣΗ:

$b_n = B_n - B_{n-1}$, $n=1,2,\dots$

$a_M b_M + a_{M+1} b_{M+1} + a_{M+2} b_{M+2} + \dots + a_N b_N =$

$= a_M (B_M - B_{M-1}) + a_{M+1}(B_{M+1} - B_M) +$

$+ a_{M+2}(B_{M+2} - B_{M+1}) + \dots + a_N (B_N - B_{N-1})$

$= -a_M B_{M-1} + (a_M - a_{M+1}) B_M + (a_{M+1} - a_{M+2}) B_{M+1}$

$+ \dots + (a_{N-1} - a_N) B_{N-1} + a_N B_N$

Ειδική περίπτωση $M=1$:

$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = \sum_{n=1}^{N-1} \Delta a_n B_n + a_N B_N$

↑

3.7 (Εφαρμογή αυτού του τύπου)

$a_n \to 0$, $a_n \downarrow$, $B_n = \sum_{n=1}^{N} b_n$ φραγμένη

δηλ. $\left| \sum_{n=1}^{N} b_n \right| \le K$

$\overset{\text{ν.δ.ο.}}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ συγκλίνει

ΛΥΣΗ:

$\sum_{n=M}^{N} a_n b_n = \overbrace{\sum_{n=M}^{N-1} \Delta a_n \cdot B_n}^{1\text{ος}} + \overbrace{a_N B_N}^{2\text{ος}} - \overbrace{a_M B_{M-1}}^{3\text{ος}}$

Όταν θ.ν.α.ο. $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n b_n$ συγκλίνει

$\Longleftrightarrow |S_N - S_M| \to 0$ $\quad N, M \to \infty$

Σκέψτομαι άρα α.ν.α.ο. S_N Cauchy ...

1οι: $\left| \sum_{n=M}^{N-1} \Delta a_n B_n \right| \leq \sum_{n=M}^{N-1} |\Delta a_n| |B_n| \leq K \sum_{n=M}^{N-1} \Delta a_n$

$= K(a_M - a_N) \longrightarrow 0, \quad M, N \to \infty$

2οι: $a_N B_N \longrightarrow 0, \quad N \to \infty$

3οι: $a_M B_{M-1} \longrightarrow 0, \quad M \to \infty$

Άρα $S_N - S_{M-1} \longrightarrow 0, \quad N, M \to \infty, \quad N > M$

Επομένως έχουμε σύγκλιση